

PRESENTACIÓN

En este tema nos vamos a centrar, sobre todo, en el cálculo de porcentajes, aunque también trabajaremos algo de los criterios de divisibilidad.

Apuntes: es importante asimilar bien los conceptos que se explican, haciendo especial énfasis en los párrafos subrayados y en negrita. Al final de este documento se encuentran las soluciones de los problemas propuestos.

Blog de Matemáticas: inicialmente pondré ejercicios de cálculo directo de porcentajes (muchos de ellos se podrán hacer mentalmente cuando se tenga asimilado el algoritmo de la operación). En la última semana también pondré problemas.

Comenzaremos con el cálculo directo de las actividades del blog y luego seguiremos, poco a poco, con la resolución de problemas de los apuntes y del blog.

En la página 91 del libro viene una **iniciación al concepto de proporcionalidad** (se verá ampliamente el curso que viene) que nos ayudará a entender la proporción directa que existe al operar con porcentajes:

Hay que tener en cuenta que si, por ejemplo, el 1% de algo es igual X, entonces el 2% será igual al doble de X o el 10% será igual a diez veces el valor de X (o la inversa si vamos dividiendo).

Criterios de divisibilidad: en los apuntes no he puesto nada (también se volverá a trabajar en el curso próximo) ya que, simplemente quiero que sepan cómo funcionan, para que sirven y que conozcan y sepan los que vienen en la página 94 del libro. Hay una actividad en la que tendrán que buscar información en Internet. Esta actividad nos ayudará a comprender un poco mejor el concepto de divisibilidad y a poder realizar correctamente algunas actividades del blog. Sin embargo, **en el examen solamente entrarán los criterios que vienen en el libro.**

Pero insisto, **lo más importante de este tema son los porcentajes y la comprensión de su relación con las fracciones.** Pienso que con la dedicación adecuada puede resultar un tema bastante ameno y, por supuesto, útil en su aplicación.

Si el libro puede ayudar a resolver cuestiones y dudas, ahí está para consultarlo. Desde mi punto de vista, solamente las páginas 84, 86, 91 y 94; y también la 90 por si nos queremos iniciar en el cálculo de porcentajes con calculadora (esto lo veremos ampliado en 6º curso).

En el cálculo de porcentajes hay que tener muy claro que, si en una situación me dicen que una cantidad tiene, por ejemplo, un 15% de descuento; tengo dos opciones para calcular el valor final: a dicha cantidad le quito el 15%, o bien hallo el 85% de esa cantidad (este concepto más el de proporción directa son los que hay que asimilar bien para operar con porcentajes).

La programación está hecha de lunes a viernes; y ya que, desgraciadamente, no celebramos la festividad de Semana Santa y tenemos que quedarnos en casa, también he incluido esa semana **(vamos a estar mucho tiempo con este tema, por lo que simplemente con ir haciendo los ejercicios diarios programados seguramente no bastaría, y sería conveniente, de vez en cuando, ir repasando y asimilando conceptos y algoritmos de aplicación).**

Si detecta algún error en cierto apartado o ejercicio de los apuntes, por favor, dígamelo.

Una vez más, decir que, ante cualquier duda, me tienen a su disposición.

PROGRAMACIÓN

31 de marzo: estudiar cómo se calcula la fracción o porcentaje de un número. Hacer página 84 del libro (actividad 2).

1 de abril: actividades del blog (Porcentajes 1 y 2).

2 de abril: actividades del blog (Porcentajes 3 y 4).

3 de abril: estudiar cómo se pasa de fracción a porcentaje y viceversa. Hacer actividades del blog (Porcentaje a fracción 1 y Fracción a porcentaje 1).

13 de abril: estudiar cómo se obtiene el valor final de una cantidad dado un porcentaje de descuento o de aumento. Hacer problemas 1 a 6 de los apuntes.

14 de abril: actividades del blog (Porcentajes rápidos). Problemas 7 a 10 de los apuntes.

15 de abril: Blog (Porcentajes 5 y Decimal a porcentaje 1). Problemas 11 a 14 de los apuntes.

16 de abril: actividades del blog (Fracción a porcentaje 2). Página 96 del libro (actividades 1 a 5).

17 de abril: estudiar los criterios de divisibilidad en la página 94 del libro. Hacer de la página 94 (ejercicios 1 y 2), y de la página 95 (ejercicios 3, 4, 5 y 6).

20 de abril: blog (Porcentajes 6 y Porcentaje a decimal 1). Problemas 15 a 18 de los apuntes.

21 de abril: mirar en internet cuáles son los criterios de divisibilidad de los números 4, 6, 10 y 25 (tomar nota y estudiarlos. Nos ayudará en próximas actividades).

NOTA: no viene en el libro, pero hay que saber que un número A es múltiplo de un número B si A dividido entre B es una división entera y exacta. Por ejemplo 12 es múltiplo de 2, además de porque es un número par, porque $12/2 = 6$ y el resto es cero (también es múltiplo de 3, 4, 6 y por supuesto del 1 y del propio 12).

Según esto, los números 1, 2, 3, 4, 6 y 12 son los divisores del número 12 (es lógico, ya que son los divisores de las divisiones que hacemos, y, por lo tanto, el dividendo sería el múltiplo).

Hacer las actividades del blog (Divisibilidad 1) y los problemas 19 a 22 de los apuntes.

22 de abril: Blog (Divisibilidad 2 y Porcentaje invertido 1). Problemas 23 a 26 de los apuntes.

23 de abril: página 91 del libro (actividades 1 a 3) y página 85 (actividades 3-4 y problemas 1-2).

24 de abril: Blog (Porcentajes 7 y Porcentaje a fracción 2). Problemas 27 a 30 de los apuntes.

27 de abril: Blog (Divisibilidad 3 y Porcentaje invertido 2). Problemas 31 a 33 de los apuntes (recomiendo que antes de hacerlos vean y trabajen sobre el vídeo "Porcentajes encadenados" que hay en el blog de matemáticas).

28 de abril: actividades del blog (Porcentaje a decimal 2 y Problemas con porcentajes 1).

29 de abril: actividades del blog (Divisibilidad 4). Problemas 34 a 37 de los apuntes.

30 de abril: actividades del blog (Divisibilidad 5 y Problemas con porcentajes 2).

1 de mayo: actividades del blog (Decimal a porcentaje 2 y Problemas con porcentajes 3).

4 de mayo: actividades del blog (Porcentajes Repaso 1 y 2).

5 de mayo: repasar del libro y/o los apuntes lo que se estime conveniente.

6-7 de mayo: examen de porcentajes y criterios de divisibilidad (se hará en el ordenador con ejercicios similares a los que hemos hecho en el blog, incluida la resolución de problemas).

PORCENTAJES – PROPORCIONALIDAD

CONCEPTOS

Lo primero que hay que saber es que **un porcentaje es una fracción o proporción**, es decir, $20\% = \frac{20}{100}$, lo que significa que de cada 100 cogemos 20 y, por lo tanto, quedan o sobran 80.

$$20\% \text{ de } 200 = \frac{20}{100} \times 200 = 40$$

$$20\% \text{ de } 300 = \frac{20}{100} \times 300 = 60$$

Luego, **cuando queremos calcular el porcentaje de algo, la operación se convierte en hallar la fracción de un número o cantidad, es decir, multiplicar la fracción o porcentaje por la cantidad**.

Ejemplo: $20\% \text{ de } 175 = \frac{20}{100} \times 175 = 35$ (en este caso, de 175 partes he cogido 35). Donde, como ya sabemos, podemos primero multiplicar 20 por 175 y luego dividir entre 100; o bien primero dividir entre 100 uno de los dos números y después multiplicar por el otro.

Para expresar una fracción como porcentaje multiplicamos la fracción por 100

Cuando hablamos de fracciones y cogemos todo, significa que su resultado es 1.

$$\frac{4}{4} = \frac{15}{15} = \frac{37}{37} = \frac{100}{100} = 1, \text{ que en forma de porcentaje sería } 1 \times 100 = 100\%.$$

$$\frac{3}{4} \text{ en forma de porcentaje sería } \frac{3}{4} \times 100 = 75\% = \frac{75}{100}$$

$$\frac{3}{2} \text{ en forma de porcentaje sería } \frac{3}{2} \times 100 = 150\% = \frac{150}{100}$$

Las igualdades vienen de conseguir fracciones equivalentes: buscar un número que multiplicado por el denominador nos de 100; por lo tanto, también tendremos que multiplicar el numerador por ese mismo número para que sean fracciones equivalentes (si hallamos la fracción irreducible de $\frac{75}{100}$ obtenemos $\frac{3}{4}$).

Teniendo en cuenta lo que se ha dicho en el primer párrafo, también es importante saber que si, por ejemplo, un artículo cuesta 160€ y me dicen que **me descuentan o rebajan un 20%; esto quiere decir que pagamos el 80% (100% – 20%); y si hay que añadirle un 20%, entonces pagamos el 120% (100% + 20%)**.

Ejemplo 1: ¿Cuánto pagaré por un artículo que costaba 160€ y le han hecho un descuento o rebaja del 20%?

Tenemos dos opciones para calcular el resultado:

1ª) Si me descuentan el 20%, pago el 80% (100% – 20%), luego sería:

$$80\% \text{ de } 160 = \frac{80}{100} \times 160 = 128\text{€}$$

En este caso la mejor operación es multiplicar directamente 8 por 16, ya que puedo dividir numerador y denominador entre 100 (80 x 160 = 8 x 10 x 16 x 10 = 8 x 16 x 100)

2ª) Calculamos el 20% de 160 y se lo restamos a 160, es decir:

$$160 - \frac{20}{100} \times 160 = 160 - 32 = 128\text{€}$$

Con el 20% podríamos hacer lo mismo que en la opción anterior.

Ejemplo 2: Si un artículo cuesta 50€ sin impuestos, ¿cuál será su precio final después de haberle añadido el 21% de impuestos?

Del mismo modo que en el ejemplo anterior, si a una cantidad queremos añadirle un porcentaje también tenemos dos opciones para resolverlo:

1ª) Calculamos el 21% de 50 y se lo sumamos a 50, es decir:

$$\frac{21}{100} \times 50 + 50 = 10,5 + 50 = 60,5€$$

En este caso me interesa dividir entre 10 y después multiplicar por 6 o viceversa ya que, si divido numerador y denominador entre 10, me quedan 6 en el numerador y 10 en el denominador (esto es importante a la hora de hacer los cálculos mentalmente, o incluso con calculadora).

2ª) Si hay que añadir el 21%, pago el 121% (100% + 21%), luego sería:

$$121\% \text{ de } 50 = \frac{121}{100} \times 50 = 60,5€$$

En este caso me interesa dividir entre 10 y después multiplicar por 6 o viceversa, ya que, si divido numerador y denominador entre 10 me quedan 6 en el numerador y 10 en el denominador (esto es importante a la hora de hacer los cálculos mentalmente, o incluso con calculadora).

Esta cuenta es bastante útil cuando hacemos la operación con calculadora (haríamos mentalmente 121/100 y después multiplicamos por 50 con la calculadora).

Como ya hemos dicho anteriormente, **calcular el porcentaje de una cantidad es multiplicar la fracción o porcentaje por dicha cantidad**. Al tratarse de un producto cumple la propiedad conmutativa. Entonces, por ejemplo, **50% de 18 = 18% de 50 = 9 (en ambos casos calculamos la mitad de 18, porque, precisamente, el otro factor, 50, es la mitad de 100)**. Este tipo de planteamiento es importante al realizar cálculos mentales.

Por último, al realizar cálculos con porcentajes, también se nos pueden presentar estas situaciones (podríamos resolverlas con una regla de tres simple, pero, como aún no lo sabemos hacer así, lo haremos con otro planteamiento):

1ª) Me dan una cantidad con el porcentaje de descuento ya aplicado o incluido:

Ejemplo: En un artículo me han descontado un 20% y he pagado 200€

¿Cuál es el precio del artículo sin descuento?

Si me han descontado un 20% habré pagado un 80%, luego a 200 habré llegado multiplicando el 80% por alguna cantidad:

$$\frac{80}{100} \times \text{algo} = 200$$

Entonces $\text{algo} = 200 : \frac{80}{100}$ (si tienes 10€ y los multiplicas por 8 tendrás 80€. Para volver a tener 10€ tendrás que dividir 80 entre 8).

Para dividir fracciones multiplicamos en cruz:

$$\frac{200 \times 100}{80} = 250€$$

2ª) Me dan una cantidad con el porcentaje de impuesto ya añadido:

Ejemplo: Compré un artículo que me costó 150€ con el impuesto del 20% ya aplicado o añadido.

¿Cuál es el precio del artículo sin impuestos?

Si me han añadido un 20% habré pagado un 120%, luego a 150 habré llegado multiplicando el 120% por alguna cantidad:

$$\frac{120}{100} \times algo = 150$$

Entonces $algo = 150 : \frac{120}{100}$ (vuelvo a repetir que si tienes 10€ y los multiplicas por 8 tendrás 80€. Para volver a tener 10€ tendrás que dividir 80 entre 8).

Para dividir fracciones multiplicamos en cruz:

$$\frac{150 \times 100}{120} = 125€$$

3ª) Me dan las dos cantidades:

Ejemplo 1: Por un artículo que costaba 50€ he pagado 30€.

¿Qué tanto por ciento de descuento me han hecho?

Hay que dividir lo que me descuentan entre lo que cuesta. Me han descontado 20€ (50 – 30), que en forma de fracción sería $\frac{20}{50}$ y como para pasarlo a porcentaje había que multiplicar por 100, la solución a la pregunta sería:

$$\frac{20}{50} \times 100 = 40\%$$

Si hubiera querido averiguar directamente el porcentaje que he pagado, entonces sería dividir lo que pago entre lo que cuesta:

$$\frac{30}{50} \times 100 = 60\%$$

Ejemplo 2: Por un artículo que costaba 50€ he pagado 55€.

¿Qué tanto por ciento de impuestos me han aplicado o añadido?

He pagado 5€ de impuestos (55 – 50), que en forma de fracción sería $\frac{5}{50}$ y como para pasarlo a porcentaje había que multiplicar por 100, la solución a la pregunta sería:

$$\frac{5}{50} \times 100 = 10\%$$

También se podría hacer dividiendo 55 entre 50, pero al multiplicar por 100 el porcentaje resultante es de 110% (en 55 va incluido el impuesto). Luego habría que quitarle 100% para tener la solución a la pregunta que me hacen. La operación sería:

$$\frac{55}{50} \times 100 - 100 = 110 - 100 = 10\%$$

PROBLEMAS

1. Al comprar una chaqueta que costaba 120 euros me hacen un descuento del 8%. ¿Cuánto dinero me rebajaron? ¿Cuánto tuve que pagar?
2. Una persona gana mensualmente 1000€. Si de impuestos le retienen un 15% ¿cuánto dinero neto o limpio le quedará?
3. Un abrigo que costaba 400 euros se rebaja un 25%. ¿Cuánto cuesta ahora?
4. El 20% de los alumnos hicieron mal un examen. Si el grupo está formado por 45 alumnos. ¿Cuántos contestaron correctamente?
5. El número de parados que había en una provincia era 24300, y se ha visto incrementado en el 10% ¿Cuántos parados hay ahora?
6. El precio de dos artículos sin IVA es de 25 y 50 euros. Averigua cuál es el precio final de cada artículo sabiendo que con el IVA suben un 21%
7. En una clase de 30 alumnos y alumnas, hoy han faltado 6. ¿Cuál ha sido el porcentaje de ausencias?
8. Un comerciante compra una camisa en 60€ y la vende en 75. ¿Qué tanto por ciento se ganó?
9. Si pagué 53€ en la compra, con un 6% de IVA., ¿cuánto pagaría sin IVA?
10. Después de gastar el 15% del depósito de gasolina de un coche quedan 42,5 l. ¿Cuál es la capacidad del depósito?
11. El precio de un balón después de hacerle un 5% de descuento es de 11,97€ ¿Cuánto dinero me han descontado?
12. Por una factura de 800 euros nos cobran 640 euros. ¿Qué tanto por ciento de descuento nos han hecho?
13. A una persona le retienen de su sueldo un 12%. Si cobra mensualmente 836 euros. ¿Cuál era su sueldo antes de la retención?
14. Si he pagado 40,60€ en un restaurante con un recargo del 16% de IVA. ¿cuál sería la factura sin IVA?
15. En las elecciones de una empresa el porcentaje de abstención o personas que no votaron fue del 25%. Sabiendo que votaron 240 personas. ¿Cuántos trabajadores son en total?
16. Por haber ayudado a mi hermano en un trabajo, me da el 12% de los 50 € que ha cobrado. ¿Cuánto dinero recibiré?
17. Para el cumpleaños de mi hermano han comprado dos docenas de pasteles y yo me he comido 9 pasteles ¿Qué porcentaje del total me he comido?
18. Una máquina que fabrica tornillos produce un 3% de piezas defectuosas. Si hoy se han apartado 51 tornillos defectuosos, ¿cuántas piezas ha fabricado la máquina?
19. Si un coche costaba 11000 euros y nos rebajan un 15 %. ¿Cuánto pagaremos por el coche?
20. Un libro que costaba 18 euros aumenta su precio en el 12%. ¿Cuánto cuesta ahora?

21. A un trabajador que ganaba 1300 euros mensuales le van a aumentar el sueldo un 4%. ¿Cuál será su nuevo salario?
22. En un bosque hay 1200 árboles. El 35% son abetos, el 45% son pinos y el resto son álamos. ¿Cuántos álamos hay en el bosque?
23. A un hombre le ponen una multa de 500 euros por exceso de velocidad, pero como tarda en pagarla se le aplica una sobretasa o recargo del 15% ¿Cuánto debe abonar ahora?
24. En un colegio hay 850 estudiantes. El 40% de ellos van al colegio en autobús y el resto en coche. ¿Cuántos estudiantes van al colegio en coche?
25. Se vende un objeto perdiendo el 20% sobre el precio de compra. Hallar el precio de venta del citado artículo cuyo valor de compra fue de 150€
26. En un comercio han vendido 18 trajes a 350 € cada uno. Si el 20% del dinero que entra en caja son ganancias, ¿cuánto han ganado con la venta de trajes?
27. En el aparcamiento de unos grandes almacenes hay 420 coches, de los que el 30 % son blancos. ¿Cuántos coches hay que no son blancos?
28. El 24% de los habitantes de un pueblo tienen menos de 30 años. ¿Cuántos habitantes tiene el pueblo si hay 90 jóvenes menores de 30 años?
29. Un traje marcaba 150 euros antes de las rebajas. En la época de rebajas el mismo traje costaba 120 euros.
 - a) ¿Qué rebaja nos hicieron en %?
 - b) Si nos rebajasen el 15% ¿cuánto nos costaría?
 - c) Si los 120 euros son sin IVA y el IVA es del 21% ¿cuánto nos costará el traje?
30. Si pagué 53 euros en la compra, con un 6% de IVA., ¿cuánto pagaría sin IVA.?
31. El año pasado me bajaron el sueldo un 5%. Si este año me suben el mismo porcentaje. ¿Cobraré lo mismo que hace dos años?
32. Si me rebajan el 20% y después me suben el 20% de la cantidad rebajada, ¿pago más, menos o igual que antes? Expresa el resultado en %
33. Averigua el resultado final en %, de subir un 10% y después bajar el 20%. Lo mismo, si primero bajamos un 20% y después subimos un 10%
34. Si el 20% de un número es 16, ¿cuál será el 30% de dicho número?
35. Al adquirir un vehículo cuyo precio es de 7500€, nos hacen un descuento y pagamos 6900€ ¿qué porcentaje del coche hemos pagado?, ¿Qué porcentaje nos han descontado?
36. En un supermercado hacen esta oferta: "Pague 2 y llévese 3". ¿Qué % me rebajan?
37. Una moto cuyo precio era de 5000 €, cuesta en la actualidad 250 € más ¿Cuál es el porcentaje de aumento?

SOLUCIONES

1. Descuento: 8% de $120 = 9,60\text{€}$ Pago: $120 - 9,6 = 110,40\text{€}$
2. Solución: 850€ $1000 - 15\%$ de 1000 o también 85% de 1000
3. Solución: 300€ $400 - 25\%$ de 400 o también 75% de 400
4. Solución: 36 alumnos $45 - 20\%$ de 45 o también 80% de 45
5. Solución: 26730 parados 10% de $24300 + 24300$ o también 110% de 24300
6. El de 50€ : 21% de $50 + 50 = 121\%$ de $50 =$ la mitad de $121 = 60,50\text{€}$
El de 25€ : la mitad del de $50\text{€} = 30,25\text{€}$ o bien, 21% de $25 + 25$, o también 121% de 25
7. $6/30 \times 100 = 20\%$
8. Gana $(75 - 60) = 15\text{€}$ luego $15/60 \times 100 = 25\%$ o también $75/60 \times 100 - 100 = 25\%$
9. 106% de algo = 53 , luego algo = $53/106\%$ $53 : 106/100 = 50\text{€}$
10. $42,5$ litros es el 85% 85% de algo = $42,5$ $42,5 : 85/100 = 50$ litros
11. 95% de algo = $11,97$ algo = $11,97 : 95/100 = 12,60\text{€}$ Solución: $12,60 - 11,97 = 0,63\text{€}$
12. Descuento: $800 - 640 = 160$ luego $160/800 \times 100 = 20\%$ o también $100 - 640/800 \times 100 = 20\%$
13. Cobra $100\% - 12\% = 88\%$ 88% de algo = 836 $836 : 88/100 = 950\text{€}$
14. 116% de algo = $40,60$ $40,60 : 116/100 = 35\text{€}$
15. Votaron $100\% - 25\% = 75\%$ 75% de algo = 240 $240 : 75/100 = 320$ personas
16. 12% de $50 = 6\text{€}$
17. Me he comido 9 de (2×12) $9/24 \times 100 = 37,5\%$
18. 3% de algo = 51 $51 : 3/100 = 1700$ tornillos
19. Solución: 9350€ $11000 - 15\%$ de 11000 o también 85% de 11000
20. Solución: $20,16\text{€}$ 12% de $18 + 18$ o también 112% de 18
21. Solución: 1352€ 4% de $1300 + 1300$ o también 104% de 1300
22. Abetos: 35% de $1200 = 420$ Pinos: 45% de $1200 = 540$
Álamos: $1200 - 420 - 540 = 240$ o también $(100\% - 35\% - 45\%)$ de $1200 = 240$
23. Solución: 575€ 15% de $500 + 500$ o también 115% de 500
24. Solución: 510 estudiantes $850 - 40\%$ de 850 o también $(100\% - 40\%)$ de 850
25. Solución: 120€ $150 - 20\%$ de 150 o también $(100\% - 20\%)$ de 150
26. 20% de $(18 \times 350) = 20/100 \times 18 \times 350 = 1260\text{€}$
27. Solución: 294 coches $420 - 30\%$ de 420 o también 70% de 420

28. 24% de algo = 90 $90 : 24/100 = 375$ habitantes
29. a) Solución: 20% $(150 - 120)/150 \times 100$ o también $100 - 120/150 \times 100$
 b) Solución: 127,50€ $150 - 15\%$ de 150 o también 85% de 150
 c) Solución: 145,20€ 21% de 120 + 120 o también 121% de 120
30. 106% de algo = 53 $53 : 106/100 = 50€$
31. Solución: NO. Cobraré menos porque si, por ejemplo, ganaras 100€ y te quitan un 5% te quedas en 95€. Si ahora, a esos 95€ le añadas el 5% tendrías 99,75€ en lugar de los 100 iniciales. La demostración está en que, aunque los porcentajes que se aplican son los mismos, en el segundo caso se está aplicando sobre una cantidad más pequeña. Para saber el porcentaje que quedaría tendrías que hacer esta operación: $95\% \times 105\% \times 100 = 99,75\%$
32. Es igual que el ejercicio anterior, en este caso pago más porque me descuentan menos dinero. Hemos pagado un 96%: $80\% \times 120\% \times 100 = 96\%$, luego me descuentan un 4% ($100\% - 96\%$)
 También podíamos haber calculado el descuento con esta operación: $20\% \times 20\% \times 100 = 4\%$
33. El resultado es el mismo porque $110\% \times 80\% \times \text{algo} = 80\% \times 110\% \times \text{algo} = 88\% \times \text{algo}$
34. 20% de algo = 16 $16 : 20/100 = 80$ Solución: 30% de 80 = 24
35. Hemos pagado: $6900/7500 \times 100 = 92\%$ Descuento: $100\% - 92\% = 8\%$
36. No pago 1 de cada 3 luego $1/3 \times 100 = 33,33\%$ sobre el total
37. $250/5000 \times 100 = 5\%$ de aumento